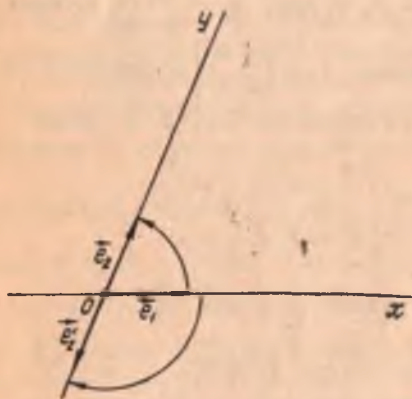


ориентацияли бўлса, $\mathcal{B} = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ ва $\mathcal{B}' = (O', \vec{e}'_1, \vec{e}'_2)$ реперлар бир хил (қарама-қарши) ориентацияли дейилади.

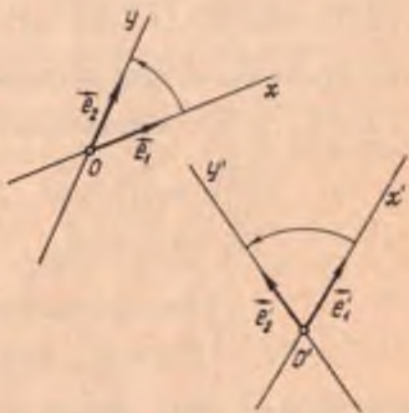
Одатда, $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ репернинг $\vec{e}_1$ векторини O нуқта атрофида $\vec{e}_2$ вектор устига тушириш учун қисқа йўл бўйича буриш соат мили ҳаракатига тескари бўлса, у мусбат ориентацияли дейилади.

Мисол. Текисликда $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$, $(O', \vec{e}'_1, \vec{e}'_2)$ реперларни қараймиз, бу ерда $\vec{e}'_1 = \vec{e}_1$, $\vec{e}'_2 = -\vec{e}_2$ бўлсин (41- чизма). B' базиснинг векторлари B базис бўйича ушбу ёйилмага эга бўлади:

$$\vec{e}'_1 = 1 \cdot \vec{e}_1 + 0 \cdot \vec{e}_2, \quad \vec{e}'_2 = 0 \cdot \vec{e}_1 - 1 \cdot \vec{e}_2 \Rightarrow \vec{e}'_1 \{ 1, 0 \}, \vec{e}'_2 \{ 0, -1 \}.$$



41- чизма



42- чизма

B базисдан B' базисга ўтиш матрицасининг детерминанти

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1 < 0.$$

Демак, бу $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ реперлар қарама-қарши ориентацияли. 41- чизмадан кўринадики, қарама-қарши ориентацияли реперларда биринчи координата векторларидан иккинчи координата векторларига қараб қисқа йўл бўйлаб бурилиш йўналишлари қарама-қаршидир. 42- чизмадаги] $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ ва $(O', \vec{e}'_1, \vec{e}'_2)$ реперлар эса бир хил ориентацияли.

18- §. Аффин координаталар системасини алмаштириш

Геометрик образларни текширишни соддалаштириш учун кўпинча координаталарнинг бир системасидан бошқа системасига ўтишга тўғри келади. Бу ҳолат бир нуқтанин ҳар хил системалардаги координаталарини боғловчи формулаларни топиш масаласини келтириб чиқаради.

Текисликда иккита $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$, $(O', \vec{e}'_1, \vec{e}'_2)$ аффин репер берилган бўлсин (43- чизма). Қўлайлик учун уларнинг биринчисини эски репер, иккинчисини янги репер деб атаيمиз. Бундан ташқари, янги репернинг эски реперга нисбатан вазияти берилган бўлсин, яъни

$$O' (c_1, c_2), \vec{e}'_1 (a_1, a_2), \vec{e}'_2 (b_1, b_2),$$

$$\overrightarrow{OO'} = c_1 \vec{e}_1 + c_2 \vec{e}_2, \quad (6)$$

$$\vec{e}'_1 = a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2, \quad \vec{e}'_2 = b_1 \vec{e}_1 + b_2 \vec{e}_2 \quad (7)$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Текисликда ихтиёрий M нуқтани оламиз. Бу нуқтанинг эски ва янги реперларга нисбатан координаталарини мос равишда x, y ва x', y' орқали белгилаймиз. У ҳолда $\overrightarrow{OM} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2$, $\overrightarrow{O'M} = x'\vec{e}'_1 + y'\vec{e}'_2$. Векторларни қўшиш таърифи ва (6), (7) муносабатлардан фойдалансак,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OM} &= \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M} = c_1 \vec{e}_1 + c_2 \vec{e}_2 + x' \vec{e}'_1 + y' \vec{e}'_2 = \\ &= c_1 \vec{e}_1 + c_2 \vec{e}_2 + x' (a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2) + y' (b_1 \vec{e}_1 + b_2 \vec{e}_2) \end{aligned}$$

ёки

$$x \vec{e}_1 + y \vec{e}_2 = (a_1 x' + b_1 y' + c_1) \vec{e}_1 + (a_2 x' + b_2 y' + c_2) \vec{e}_2.$$

$\vec{e}_1, \vec{e}_2$ векторларнинг чизиқли эркилигини ҳисобга олсак,

$$x = a_1 x' + b_1 y' + c_1, \quad y = a_2 x' + b_2 y' + c_2. \quad (8)$$

M нуқтанинг эски системага нисбатан координаталари x, y , унинг янги системага нисбатан координаталари x', y' орқали шу (8) кўринишда ифодаланади.

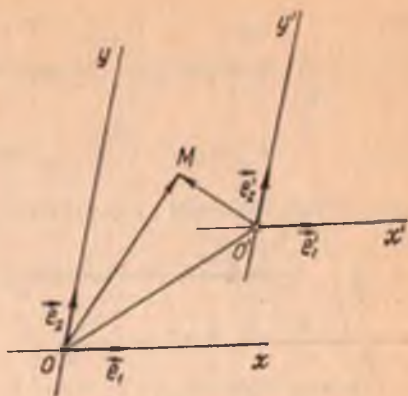
(8) формулалар бир аффин репердан иккинчи аффин реперга ўтиш формулалари дейилади. Бу формулаларда $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$ шарт билан боғланган олти коэффицент қатнашган. Қўйидаги икки хусусий ҳолни қараймиз:

1. $O \neq O', \vec{e}'_1 = \vec{e}_1, \vec{e}'_2 = \vec{e}_2$ бўлсин (44- чизма). У ҳолда $a_1 = b_2 = 1, a_2 = b_1 = 0$ бўлиб, (8) формулалар

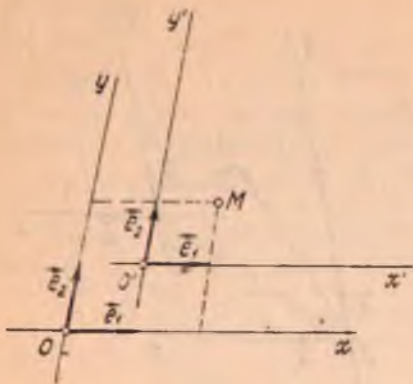
$$x = x' + c_1, \quad y = y' + c_2 \quad (9)$$

кўринишни олади.

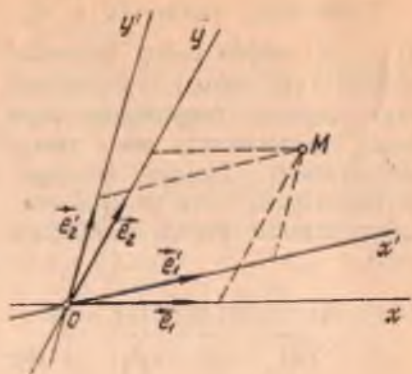
(9) формулалар координаталар системасини параллел кўчириш формулалари деб аталади.



43- ЧИЗМА



44- чизма



45- чизма

2. $O = O'$ за базис векторлар турлича бўлсин (45- чизма). У ҳолда $c_1 = c_2 = 0$ бўлиб, (8) дан

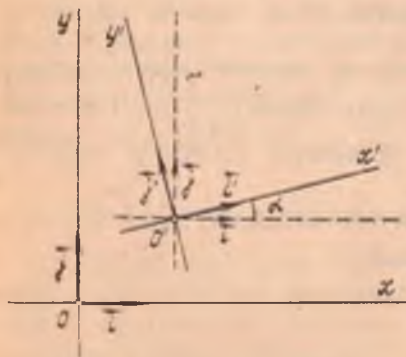
$$x = a_1 x' + b_1 y', \quad y = a_2 x' + b_2 y'. \quad (10)$$

19- §. Декарт координаталари системасини алмаштириш

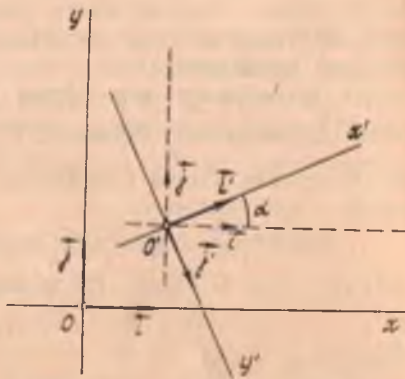
Текисликда $\mathcal{B} = (O, \vec{i}, \vec{j})$ ва $\mathcal{B}' = (O', \vec{i}', \vec{j}')$ декарт реперлари берилган бўлсин. Бу ҳолда (8) формулалардаги a_1, a_2 лар $\vec{i}'$ векторнинг, b_1, b_2 лар эса $\vec{j}'$ векторнинг $\mathcal{B} = (O, \vec{i}, \vec{j})$ реперга нисбатан координаталари бўлади, яъни

$$\vec{i}' = a_1 \vec{i} + a_2 \vec{j}, \quad \vec{j}' = b_1 \vec{i} + b_2 \vec{j}. \quad (11)$$

$(\vec{i}, \vec{i}') = \alpha$ бўлсин. Агар $\mathcal{B}$ ва $\mathcal{B}'$ декарт реперлари бир хил ориентацияли бўлса, у ҳолда (46- чизма)



46- чизма



47- чизма

$$(\vec{i}, \vec{j}') = 90^\circ + \alpha, (\vec{i}', \vec{j}) = 90^\circ - \alpha, (\vec{j}, \vec{j}') = \alpha. \quad (12)$$

$\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ декарт реперлари қарама-қарши ориентацияли бўлса (47-чизма), у ҳолда

$$(\vec{i}, \vec{j}') = 270^\circ + \alpha, (\vec{i}', \vec{j}) = 90^\circ - \alpha, (\vec{j}, \vec{j}') = 180^\circ + \alpha. \quad (13)$$

(11) генгликларни навбат билан $\vec{i}, \vec{j}$ векторларга скаляр купайтирсак,

$$a_1 = \vec{i}' \cdot \vec{i} = \cos(\vec{i}', \vec{i}), \quad a_2 = \vec{i}' \cdot \vec{j} = \cos(\vec{i}', \vec{j}),$$

$$b_1 = \vec{j}' \cdot \vec{i} = \cos(\vec{j}', \vec{i}), \quad b_2 = \vec{j}' \cdot \vec{j} = \cos(\vec{j}', \vec{j}).$$

(12) ва (13) муносабатларни ҳисобга олсак, $\vec{i}', \vec{j}'$ векторларнинг $\mathcal{B}$ реперга нисбатан координаталари, агар $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ реперлар бир хил ориентацияли бўлса,

$$\vec{i}' (\cos \alpha, \sin \alpha), \quad \vec{j}' (-\sin \alpha, \cos \alpha);$$

$\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ реперлар қарама-қарши ориентацияли бўлганда эса

$$\vec{i}' (\cos \alpha, \sin \alpha), \quad \vec{j}' (\sin \alpha, -\cos \alpha).$$

У ҳолда (8) формулалар қуйидаги кўринишни олади:

$$\begin{cases} x = x' \cos \alpha - y' \sin \alpha + c_1, \\ y = x' \sin \alpha + y' \cos \alpha + c_2, \end{cases} \quad (14)$$

$$\begin{cases} x = x' \cos \alpha + y' \sin \alpha + c_1, \\ y = x' \sin \alpha - y' \cos \alpha + c_2. \end{cases} \quad (15)$$

(14) ва (15) формулаларни битта

$$\begin{aligned} x &= x' \cos \alpha - \varepsilon y' \sin \alpha + c_1, \\ y &= x' \sin \alpha + \varepsilon y' \cos \alpha + c_2 \end{aligned} \quad (16)$$

кўринишдаги ёзувга бирлаштириш мумкин, бу ерда $\varepsilon = \pm 1$. Шундай қилиб, $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ реперлар декарт реперлари бўлганида уларнинг бирдан иккинчисига ўтиш (16) формулалар билан ифодаланади. Бу ерда, $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ реперлар бир хил ориентацияли бўлса, $\varepsilon = +1$, акс ҳолда эса $\varepsilon = -1$.

Мисол. Иккита аффин репер $\mathcal{B} = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$, $\mathcal{B}' = (O', \vec{e}'_1, \vec{e}'_2)$ берилган бўлиб, бунда $O' (1, 2)$, $\vec{e}'_1 (-1, 1)$, $\vec{e}'_2 (2, -1)$ бўлсин. М нуқтанинг $\mathcal{B}$ реперга нисбатан координаталари $x = 2$, $y = 1$ эканини билган ҳолда бу нуқтанинг $\mathcal{B}'$ реперга нисбатан координаталари x' , y' ни топинг.

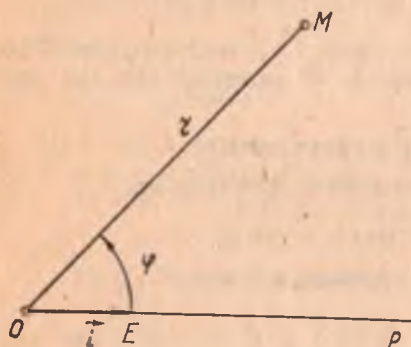
Ечиш. Берилган: $a_1 = -1$, $b_1 = 2$, $c_1 = 1$, $a_2 = 1$, $b_2 = -1$, $c_2 = 2$. Бу қийматларни (8) формулаларга қўйсак,

$$x = -x' + 2y' + 1, \quad y = x' - y' + 2.$$

$x = 2, y = 1$ эканини ҳисобга олсак, $2 = -x' + 2y' + 1, 1 = x' - y' + 2$ ёки $-x' + 2y' = 1, x' - y' = -1$, бу системани ечиб, $x' = -1, y' = 0$ ни топамиз. Демак, M нуқтанинг $3'$ реперга нисбатан координаталари $x' = -1, y' = 0$.

20- §. Қутб координаталар системаси

Кўп тадқиқотларда ва эгри чизиқларнинг муҳим синфларини (масалан, спиралларни) ўрганишда қутб координаталар системаси деб аталувчи системани қўлланиш мақсадга мувофиқдир. Бу параграфда шу система билан танишамиз.



48- чизма

Ориентацияли текисликда бирор O нуқта OP нур ва OP нур-

да ётувчи $\overrightarrow{OE} = \vec{i}$ бирлик векторни белгилаймиз (48- чизма). Ҳосил қилинган геометрик образ **қутб координаталар системаси** дейилади. Уни $(O, \vec{i})$ кўринишда белгилаймиз. O нуқта **қутб боши**, OP нур эса **қутб ўқи** дейилади. M нуқтанинг текисликдаги вазияти маълум тартибда олинган икки сон: бири OE бирлик кесма ёрдамида ўлчанган $r = |\overrightarrow{OM}| \geq 0$ масофа, иккинчиси OP нур OM нурнинг устига тушиши

учун бурилиши керак бўлган $\varphi = (\vec{i}, \overrightarrow{OM})$ бурчак билан тула аниқланади.

Қутб ўқини OM нур устига тушгунга қадар буриш мусбат йўналишда, яъни соат мили йўналишига тескари йўналишда бажарилса, φ мусбат деб, акс ҳолда φ ни манфий деб ҳисобланади.

r ни M нуқтанинг **қутб радиуси**, φ ни M нуқтанинг **қутб бурчаги** дейилиб, уларни M нуқтанинг **қутб координаталари** дейилади ва $M(r, \varphi)$ кўринишда белгиланади.

O нуқта учун $r = 0$ бўлиб, φ аниқланмаган ҳисобланади. Агар $0 \leq r < \infty, 0 \leq \varphi < 2\pi$ ярим сегментда ўзгарса, текисликнинг ҳар бир нуқтаси қутб координаталари билан таъминланади.

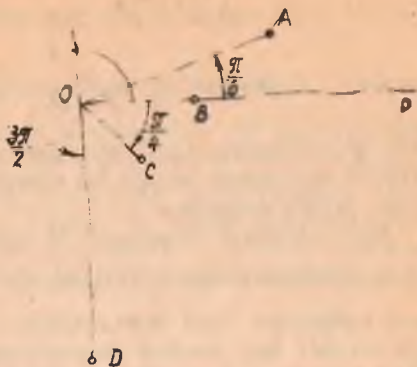
Масалан, A, B, C, D нуқталар 49- чизмада ушбу қутб координаталарига эга:

$$A\left(2, \frac{\pi}{6}\right), B(1, 0), C\left(\frac{3}{4}, -\frac{\pi}{4}\right), D\left(3, \frac{3\pi}{2}\right).$$

Равшанки, сонларнинг ҳар қандай (r, φ) жуфти учун текисликнинг битта нуқтаси мавжуд бўлиб, сонларнинг бу жуфти шу нуқта учун қутб координаталар бўлади. Аммо бир нуқтанинг ўзига чексиз кўп сонлар жуфтлиги мос келади. Чунончи, M нуқтанинг координаталари

$r = a > 0$, $\varphi = \alpha$ бўлса, $r = -a$, $\varphi = \alpha \pm 2\pi k$ (бу ерда $k=0, 1, 2, \dots$) жуфтликлар ҳам шу M нуқтанинг координаталари бўлади, чунки OM нур OP қутб ўқини α бурчак қадар бурилишидан ҳосил бўлади деб фараз қилсак, у ҳолда OP нурни $\varphi = \alpha \pm 2\pi k$ қадар бурилишидан ҳам уша нурнинг ўзини ҳосил қилиш мумкин.

M нуқтанинг қутб бурчаги қабул қилиши мумкин бўлган қийматлари орасидан $-\pi \leq \varphi \leq \pi$ тенгсизликни қаноатлантирадиган аниқ бир қиймати ажратилади ва у бош қиймат деб аталади. Қутб бурчагининг бош қиймаги сифатида OP нурни OM нурнинг устига тушириш учун уни буриш керак бўлган бурчак олинади. OM нур OP нурга қарама-қарши йўналган бўлса, 180° га икки йўналишда буриш мумкин, бу вақтда қутб бурчагининг бош қиймати учун $\varphi = \pi$ қабул қилинади.



49- чизма

21-§. Нуқтанинг қутб ва декарт координаталари ўрасидаги боғланиш

Текисликда (O, i) қутб координаталар системаси берилган бўлсин. Координаталар боши қутб боши билан, абсциссалар ўқининг мусбат қисми қутб ўқи билан устма-уст тушадиган мусбат ориентацияли (O, i, j) декарт реперини киритамиз (50- чизма).

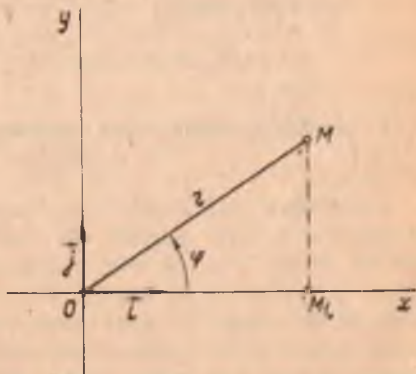
M нуқтанинг қутб координаталари r, φ , декарт координаталари эса x, y бўлсин.

OM_1M тўғри бурчакли учбурчакдан:

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi. \quad (17)$$

M нуқтанинг қутб координаталари r, φ маълум бўлса, (17) формулалар бўйича унинг декарт координаталари ҳисобланади.

Ўз навбатида M нуқтанинг қутб координаталари r, φ ни унинг декарт координаталари x, y орқали топиш мумкин. OM_1M учбурчакдан:



50- чизма

$$\left. \begin{aligned} r &= \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x} \Rightarrow \varphi = \arctg \frac{y}{x}, \\ \cos \varphi &= \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \sin \varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}. \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

(17) M нуқтанинг қутб координаталаридан декарт координаталарига,
(18) M нуқтанинг декарт координаталаридан қутб координаталарига ўтиш формулаларидир.

Шуни эслатиб ўтамизки, M нуқтанинг декарт координаталаридан қутб координаталарига ўтишда $\operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x}$ формула қутб бурчагининг бош қийматини тула аниқламайди, чунки бунинг учун яна φ миқдор мусбат ёки манфий эканлигини ҳам билиш керак. Одатда бу M нуқтанинг қайси чоракда жойлашишига қараб аниқланади. Масалан, (18) формулада $x = 3, y = 3$ бўлса, $\operatorname{tg} \varphi = 1$ бўлиб, $\varphi = 45^\circ$. Лекин $x = -3, y = -3$ бўлганда ҳам $\operatorname{tg} \varphi = 1$ бўлиб, энди φ бурчак 45° эмас, балки 135° бўлиши керак, чунки $(-3, -3)$ нуқта учинчи чоракда жойлашган. φ бурчакнинг қиймати ва ишорасини $\cos \varphi, \sin \varphi$ га қараб аниқлаш қулайроқ.

Мисол. Қутб координаталари билан берилган $M_1(r_1, \varphi_1), M_2(r_2, \varphi_2)$ нуқталар орасидаги масофани ҳисоблаш формуласини келтириб чиқаринг.

Ечиш. M_1, M_2 нуқталарнинг декарт координаталари $M_1(x_1, y_1)$ ва $M_2(x_2, y_2)$ бўлсин. Декарт координаталаридан қутб координаталарига ўтиш формулаларига кўра

$$\begin{aligned} x_1 &= r_1 \cos \varphi_1 & \text{ва} & & x_2 &= r_2 \cos \varphi_2, \\ y_1 &= r_1 \sin \varphi_1 & & & y_2 &= r_2 \sin \varphi_2. \end{aligned}$$

У ҳолда

$$\begin{aligned} \rho(M_1, M_2) &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \\ &= \sqrt{(r_2 \cos \varphi_2 - r_1 \cos \varphi_1)^2 + (r_2 \sin \varphi_2 - r_1 \sin \varphi_1)^2} = \\ &= \sqrt{r_1^2 (\cos^2 \varphi_1 + \sin^2 \varphi_1) + r_2^2 (\cos^2 \varphi_2 + \sin^2 \varphi_2) - 2r_1 r_2 (\cos \varphi_2 \cos \varphi_1 + \\ &\quad + \sin \varphi_2 \sin \varphi_1)} = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)}, \\ \rho(M_1, M_2) &= \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)}. \end{aligned}$$

22- §. Координаталарни боғловчи тенглама ва тенгсизликларнинг геометрик маъноси

Текисликда бирор (O, e_1, e_2) аффин репер олиниб, x, y ўзгарувчиларнинг камида бирини ўз ичига олган $F(x, y)$ ифода берилган бўлсин. Агар $x = x_0, y = y_0$ сонлар учун $F(x_0, y_0)$ ифода маънога эга бўлса, у ҳолда x_0, y_0 сонлар $F(x, y)$ ифоданинг аниқланиш соҳасига тегишли дейилади. Бундай сонларнинг ҳар бир жуфти берилган реперда тайин битта нуқтани аниқлайди. Барча бундай нуқталар туплами текисликдаги бирор геометрик фигурадан иборат. Бу фигура